Méthode de la puissance
itérée

Leçon : 149, 226

Rapp : Analyse matricielle, Rombaldi.

But : donner un algorithme approchant les vp d'une matrice.

On commence par un premier théorème.

Théorème 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, tq la vp λ_1 de module maximum est unique. Cette vp est alors réelle et simple, l'espace propre associé est une droite vectorielle et on a $\mathbb{R}^n = \ker(A - \lambda_1 I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - \lambda_1 I_n)$, le sev $\mathrm{Im}(A - \lambda_1 I_n)$ étant stable par A.

Preuve

On note $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, avec $\rho(A) = |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$.

λ_1 est nécessairement réelle et simple, car A étant une matrice réelle son spectre est stable par conjugaison et λ_1 est l'unique vp de module maximum.

On note $\left.\begin{array}{l} E_1 = \ker(A - \lambda_1 I_n) \\ F_1 = \mathrm{Im}(A - \lambda_1 I_n) \end{array}\right\}$ stables par A.

On a donc E_1 qui est de dimension 1.

Mq $E = E_1 \oplus F_1$.

- $\dim E = \dim E_1 + \dim F_1$, par le théorème du rang.
- Soit $y \in E_1 \cap F_1$. Alors $y = Ax - \lambda_1 x$, pour un $x \in E$. et $Ay = \lambda_1 y$. Donc $Ay = A^2 x - \lambda_1 Ax$.

On a $y = (A - \lambda_1 I)x$ et $(A - \lambda_1 I)y = 0$, donc $x \in \ker((A - \lambda_1 I)^2)$.

Or les vp de $A-\lambda_1 I_n$ sont $0, \lambda_2-\lambda_1, \dots, \lambda_2-\lambda_n$, la vp 0 étant simple.

La matrice $(A-\lambda_1 I_n)^2$ a donc pour vp $\underbrace{0}_{\text{simple}}, (\lambda_2-\lambda_1)^2, \dots, (\lambda_2-\lambda_n)^2$.

Ainsi $\dim \operatorname{Ker}[(A-\lambda_1 I)^2] = 1$.

Or $\underbrace{\{0\}}_{\dim 0} \neq \underbrace{\operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I)}_{\text{nécessairement } \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I) = 1} \subset \underbrace{\operatorname{Ker}((A-\lambda_1 I)^2)}_{\dim 1}$

$\dim 0 < \quad \leq \dim 1$

et $\operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I) = \operatorname{Ker}((A-\lambda_1 I)^2)$. Donc $x \in \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I)$.

donc $\boxed{y=0}$

On a donc $E_1 \cap F_1 = \{0\}$ et $\boxed{E = E_1 \oplus F_1}$ $(E = \mathbb{R}^n)$.

Plus généralement, si $\lambda \in Sp(A)$ est d'ordre p, alors $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I)^p \oplus \operatorname{Im}(A-\lambda_1 I)^p$.

Théorème 2

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, et λ_1 est la vp de module max de A et elle est unique. On pose $\begin{cases} E_1 = \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I) \\ F_1 = \operatorname{Im}(A-\lambda_1 I) \end{cases}$.

On définit la suite $\begin{cases} x^{(0)} = e_1 + f_1, \quad e_1 \in E_1 \setminus \{0\}, \ f_1 \in F_1. \\ \forall k \in \mathbb{N}, \ x^{(k+1)} = \dfrac{1}{\underbrace{\|Ax^{(k)}\|}_{\text{norme qcq}}} Ax^{(k)}. \end{cases}$

Alors cette suite est bien définie et

i) $\lim\limits_{k \to +\infty} \|Ax^{(k)}\| = |\lambda_1| = \rho(A)$

ii) $\lim\limits_{k \to +\infty} x^{(2k)} = v_1$, $\lim\limits_{k \to +\infty} x^{(2k+1)} = v_2 = \operatorname{sgn}(\lambda_1) v_1$, où v_1 $\vec{vp}$ non nul associé à λ_1.

xxi) $\forall j \in [1,m]$ tel que $e_{1,j} \neq 0$, $\lim_{k\to\infty} \frac{(Ax^{(k)})_j}{x_j^{(k)}} = \lambda_1$.

($e_{1,j}$ composante de e_1)

Preuve

On note $B = A|_{F_1}$ (matrices $\leftrightarrow$ endomorphismes) la restriction de A à F_1. Ainsi B a pour vp $\lambda_2, \dots, \lambda_n$.

On a $Ax^{(0)} = Ae_1 + Bf_1 \neq 0$ donc $x^{(1)}$ est bien définie. Par récurrence, $x^{(k)}$ est bien définie, avec une projection non nulle sur E_1. Plus précisément on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} A^k x^{(0)} = \lambda_1^k e_1 + B^k f_1 \neq 0 \\ x^{(k)} = \frac{1}{\|A^k x^{(0)}\|} A^k x^{(0)}. \end{cases}$$

En effet, la récurrence est vraie pour $k=1$. Si on a la récurrence pour $k \geq 1$, alors $x^{(k+1)} = \frac{1}{\|Ax^{(k)}\|} Ax^{(k)}$

$$= \frac{1}{\|A^k x^{(k)}\|} \frac{A^{k+1} x^{(0)}}{\|A^k x^{(0)}\|} \quad \text{et } \|Ax^{(k)}\| = \frac{1}{\|A^k x^{(0)}\|} \|A^{k+1} x^{(0)}\|, \text{ donc } x^{(k+1)} = \frac{1}{\|A^{k+1} x^{(0)}\|} A^{k+1} x^{(0)}.$$

Pour tout entier $k \geq 1$, on a $A^k x^{(0)} = \lambda_1^k e_1 + B^k f_1 = \lambda^k (e_1 + f_k)$ avec $\lim_{k\to+\infty} f_k = \lim_{k\to+\infty} \left[\left(\frac{1}{\lambda_1} B\right)^k f_1 \right] = 0$ car $\rho\left(\frac{1}{\lambda_1} B\right) < 1$.

En écrivant que $x^{(R)} = \left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right)^R \frac{1}{\|e_1+f_R\|}(e_1+f_R)$, on déduit que

$$\|Ax^{(R)}\| = \frac{1}{\|e_1+f_R\|}\|\lambda_1 e_1 + Af_R\|$$

et $\left[\lim_{R\to+\infty}\|Ax^{(R)}\| = |\lambda_1| = \rho(A).\right]$

On déduit aussi que

$$\lim_{R\to\infty} x^{(2R)} = v_1 = \frac{1}{\|e_1\|}e_1, \quad \lim_{R\to+\infty} x^{(2R+1)} = \frac{\mathrm{sgn}(\lambda_1)}{\|e_1\|}e_1$$

Enfin, avec $Ax^{(R)} - \lambda_1 x^{(R)} = \left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right)^R \frac{1}{\|e_1+f_R\|}(Af_R - \lambda_1 f_R)$, on déduit que $\lim_{R\to+\infty}(Ax^{(R)} - \lambda_1 x^{(R)}) = 0$.

Comme $e_{1,\gamma} \neq 0$, il existe $\gamma \in \{1,\dots,m\}$ tq $e_{1,\gamma} \neq 0$ et pour R assez grand, on a $x_\gamma^{(R)} \neq 0$. Donc $\lambda_1 = \lim_{R\to+\infty} \frac{(Ax^{(R)})_\gamma}{x_\gamma^{(R)}}$ □.

- Thm Perron-Frobenius : matrice réelle à coeff > 0 a une unique valeur propre dominante.